

# Movimiento Armónico Simple

## Introducción al Movimiento Armónico Simple



observe la representación del Movimiento Armónico Simple (en lo que sigue M.A.S.), identificando las principales magnitudes que en él intervienen, y visualice los valores que éstas toman en distintos casos, así como las variaciones que experimentan en diversos instantes y posiciones.

### OBJETIVOS

- Identificar el MAS como un movimiento periódico, oscilatorio y vibratorio.
- Visualizar un cuerpo que describe un MAS.
- Definir e identificar las principales magnitudes físicas que intervienen en un MAS.
- Visualizar e interactuar con las gráficas que representan dichas magnitudes.
- Visualizar la relación existente entre el MAS y el Movimiento Circular Uniforme.

### Definiciones

Un movimiento se llama **periódico** cuando a intervalos regulares de tiempo se repiten los valores de las magnitudes que lo caracterizan. Un movimiento periódico es **oscilatorio** si la trayectoria se recorre en ambas direcciones. Un movimiento oscilatorio es **vibratorio** si su trayectoria es rectilínea y su origen se encuentra en el centro de la misma.

El movimiento **ARMÓNICO** es un movimiento vibratorio en el que la posición, velocidad y aceleración se pueden describir mediante funciones senoidales o cosenoidales. De todos los movimientos armónicos, el más sencillo es el Movimiento Armónico Simple, que es al que nos referiremos de aquí en adelante.

El **MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE** es aquel en el que la posición del cuerpo viene dada por una función del tipo:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

Pulsando el botón avanzar verás el significado de cada una de las magnitudes que aparecen en esta ecuación.

### Magnitudes fundamentales

**Elongación** ( $y$ ): es la distancia del móvil al origen (O) del movimiento en cada instante.

**Amplitud** ( $A$ ): es la elongación máxima que se alcanza.

**Periodo** ( $T$ ): tiempo en que tarda en realizarse una vibración completa.

**Frecuencia** ( $f$ ): número de vibraciones completas realizadas en la unidad de

tiempo. . Es la inversa del período:

$$f = \frac{1}{T}$$

**Pulsación o frecuencia angular** ( $\omega$ ):

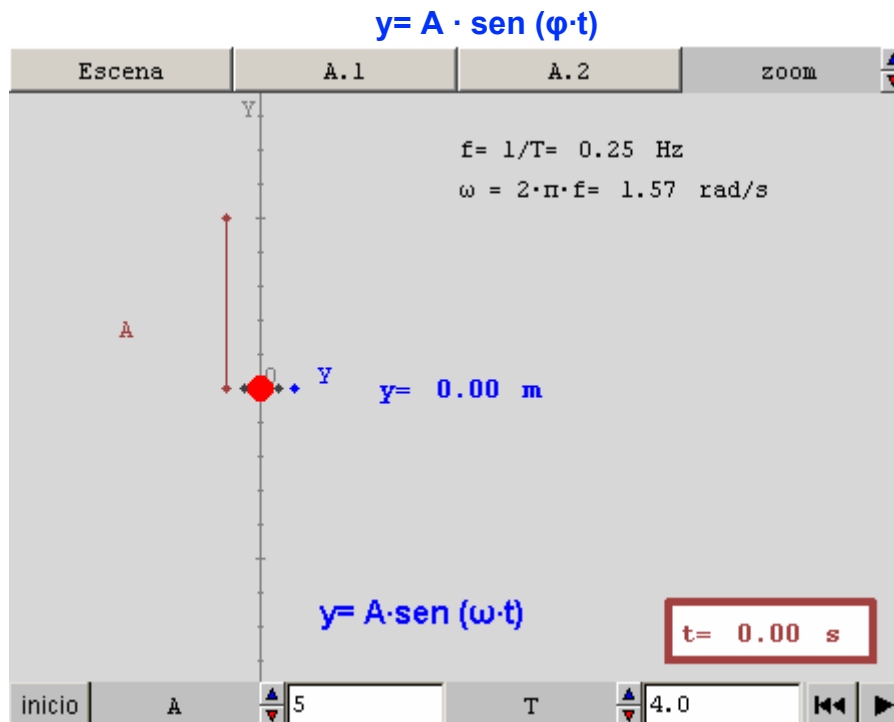
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

**Desfase, fase inicial o corrección de fase** ( $\varphi$ ): su valor determina la posición del cuerpo en el instante inicial. Más adelante veremos su significado.

## Representación del M.A.S.

Pulsando el botón avanzar puedes ver representado un cuerpo que describe un M.A.S. y observar el significado de las magnitudes anteriormente citadas.

Para simplificar en un principio, se supone el caso particular en el que **no hay desfase**, es decir  $\varphi=0$ . En este caso la ecuación del movimiento toma la forma:



ESCENA: En la escena puedes ver representado un cuerpo que describe un M.A.S. en el caso más sencillo en el que no existe desfase.

A.1: Modifica el valor de la amplitud con el pulsador A y fíjate en el resultado. Utiliza los pulsadores del zoom si es necesario para ver la escena completa.

A.2: Modifica el valor del período con el pulsador T y observa en qué cambia el movimiento. Observa la variación en los valores de la frecuencia y la pulsación que aparecen en pantalla a medida que cambia el periodo.

INICIO: Devuelve la escena a su estado inicial reiniciando los valores de los controles y auxiliares. Si hay animación automática, ésta comienza de nuevo.

RETROCESO: Este es el botón de "reinicio de animación". Reinicia la animación de manera que no continúa donde se detuvo sino que comienza de nuevo.

PLAY: Arranca, detiene o continúa la animación. Si la animación no ha comenzado, este botón la arranca. Si la animación está funcionando, el botón la detiene. Si la animación está detenida, el botón la hace continuar. Para hacerla comenzar de nuevo hay que pulsar el botón de "reinicio de animación" ("|<<").

## La posición en el M.A.S.

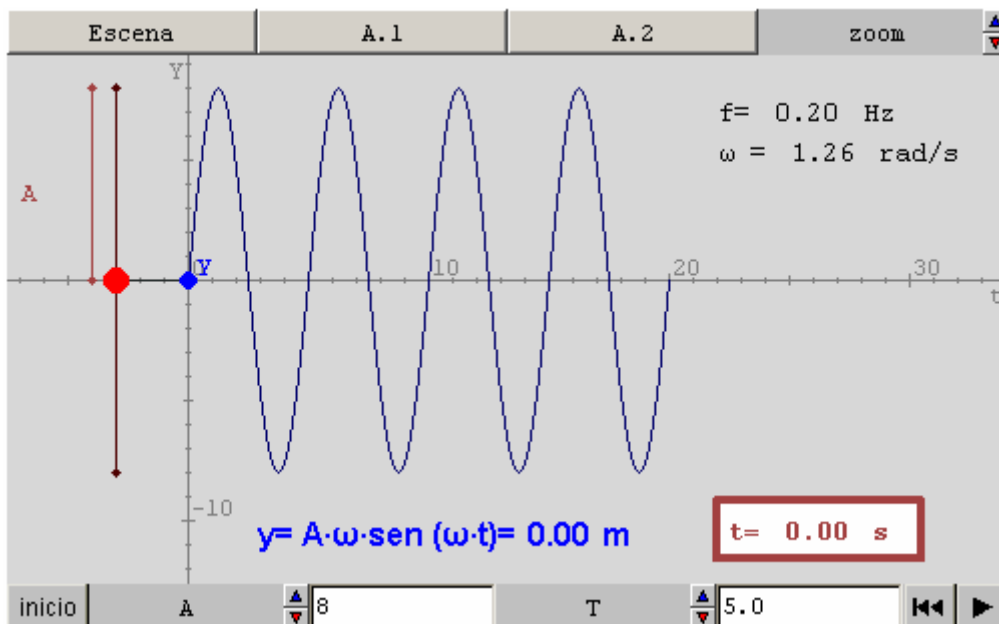
Como ya se ha dicho, la posición de un cuerpo que describe un M.A.S. viene dada por una ecuación de tipo senoidal:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

El caso más sencillo se produce cuando no existe desfase ( $\varphi=0$ ). En este caso la ecuación queda reducida a:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega t)$$

Pulsa en avanzar y verás la representación gráfica de esta función.



**ESCENA:** En la escena se observa como, a medida que pasa el tiempo (eje horizontal), la posición (eje vertical) sigue una gráfica de tipo senoidal.

**A.1:** Modifica el valor de la amplitud del movimiento y observa los cambios que se producen en la gráfica.

**A.2:** Cambia ahora el período del movimiento y analiza los cambios en la gráfica, en la pulsación y en la frecuencia. ¿Podrías identificar y deducir de la gráfica el valor del período si no lo conocieras?

**INICIO:** Devuelve la escena a su estado inicial reiniciando los valores de los controles y auxiliares. Si hay animación automática, ésta comienza de nuevo.

**RETROCESO:** Este es el botón de "reinicio de animación". Reinicia la animación de manera que no continúa donde se detuvo sino que comienza de nuevo.

## La velocidad en el M.A.S.

La velocidad  $v$  de un móvil que describe un M.A.S. se obtiene derivando la posición

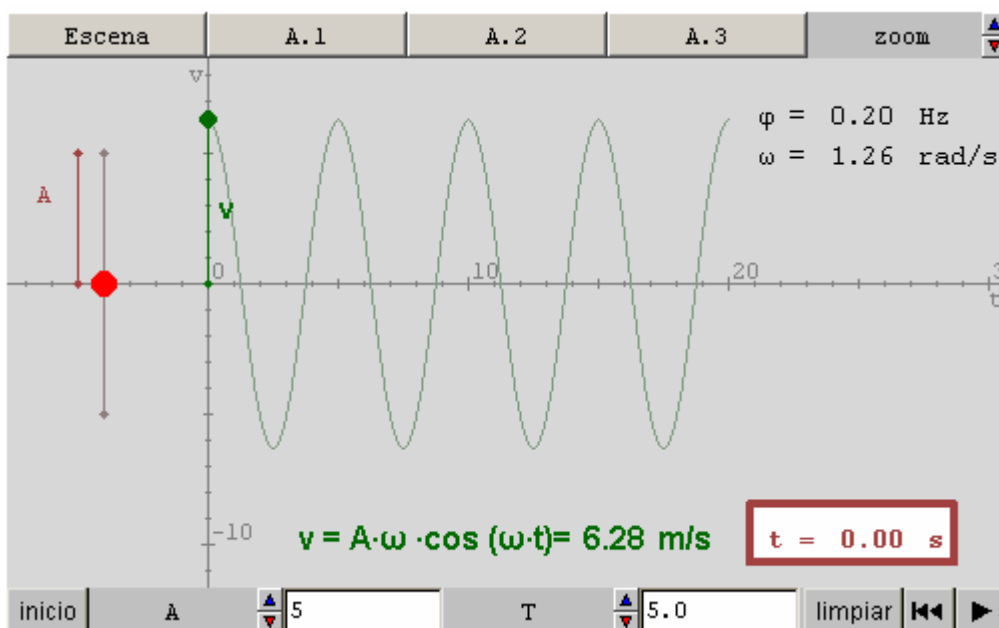
$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

respecto al tiempo:

Si nos ceñimos de nuevo al caso más simple, en el que el desfase  $\varphi = 0$ , la ecuación se simplifica:

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

Pulsa el botón avanzar para ver la representación gráfica de esta función.



**ESCENA:** En la escena aparece representado el vector velocidad del cuerpo que realiza el M.A.S. En la gráfica, de tipo cosenoidal, se representa el valor de la velocidad frente al tiempo.

**A.1:** Cambiando los valores de amplitud y período podrás comprobar su influencia en el vector velocidad del cuerpo y en la gráfica que lo representa.

**A.2:** El vector velocidad es siempre tangente a la trayectoria y del mismo sentido del movimiento. ¿En qué condiciones toma la velocidad signo positivo en la gráfica? ¿Y negativo?

**A.3:** Investiga, observando el movimiento del cuerpo y la gráfica, en qué posiciones se encuentra el cuerpo cuando la velocidad toma sus valores absolutos máximos y mínimos.

**INICIO:** Devuelve la escena a su estado inicial reiniciando los valores de los controles y auxiliares. Si hay animación automática, ésta comienza de nuevo.

## La aceleración en el M.A.S.

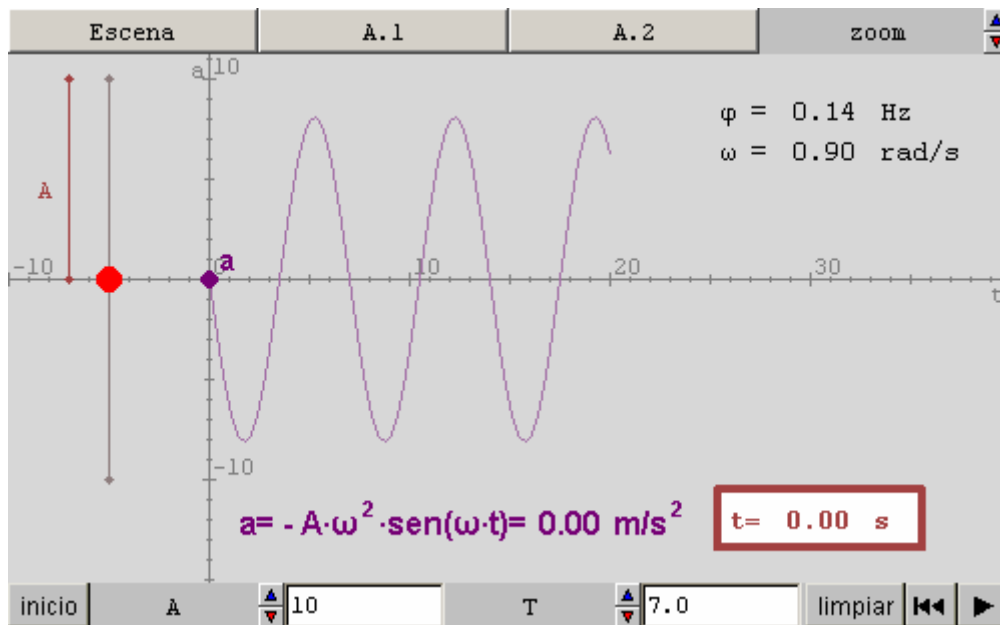
Al ser el M.A.S. un movimiento rectilíneo no posee aceleración normal. Así, la aceleración total coincide con la aceleración tangencial y, por tanto, puede obtenerse derivando el módulo de la velocidad:

$$a = \frac{dv}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

En el caso más simple, el desfase es nulo ( $\varphi = 0$ ) y la ecuación toma la forma:

$$a = -A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t)$$

En la siguiente página se puede observar la gráfica aceleración-tiempo de un M.A.S.



**ESCENA:** En esta escena, la flecha representa al vector aceleración. Así mismo, la gráfica representa el valor de la aceleración (eje vertical) frente al tiempo (eje horizontal).

**A.1:** El vector aceleración es siempre tangente a la trayectoria y su sentido depende de la elongación. ¿En qué condiciones toma la aceleración signo positivo? ¿Y negativo?

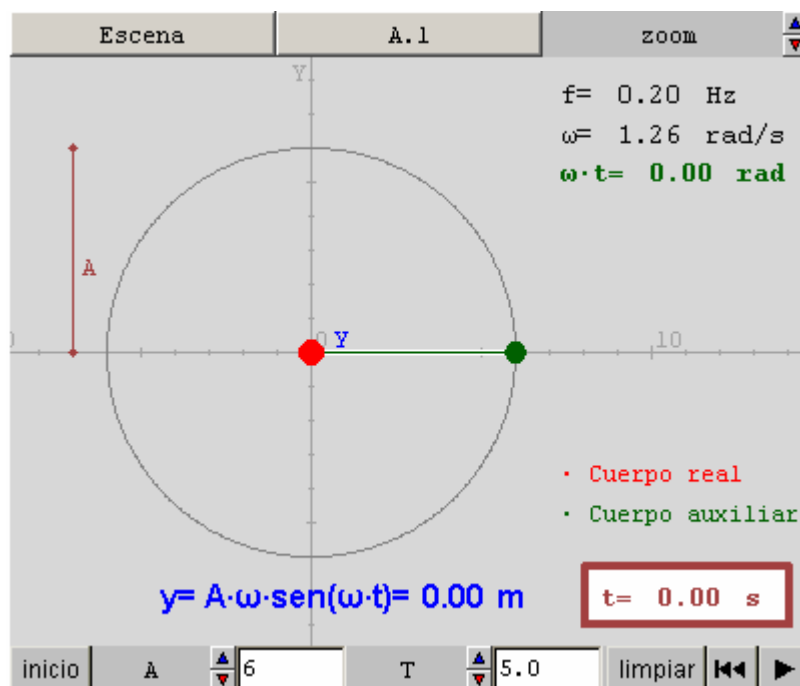
**A.2:** Investiga, observando tanto la flecha como la gráfica, en qué posiciones del cuerpo la aceleración toma sus valores absolutos máximos, y en cuáles los mínimos.

**INICIO:** Devuelve la escena a su estado inicial reiniciando los valores de los controles y auxiliares. Si hay animación automática, ésta comienza de nuevo.

## Relación entre el M.A.S. y el Movimiento Circular Uniforme

El M.A.S. de un **cuerpo real** se puede considerar como el movimiento de la "proyección" (sombra que proyecta) de un **cuerpo auxiliar** que describiese un movimiento circular uniforme (M.C.U.) de radio igual a la amplitud  $A$  y velocidad angular  $\omega$ , sobre el diámetro vertical de la circunferencia que recorre.

En la siguiente página podrás visualizar dicha relación.



**ESCENA:** Inicia la animación para comenzar el movimiento con los valores de amplitud y período seleccionados. Observa como la posición del cuerpo real coincide con la de la sombra que el cuerpo auxiliar proyectaría sobre el diámetro vertical de la circunferencia si la escena estuviese iluminado desde los lados izquierdo y derecho.

**A.1:** Cambia los valores de la amplitud y el período y observa las modificaciones producidas. Reduce el nivel de zoom si es necesario. Observa como el producto  $\omega \cdot t$  (representado en verde en la escena) coincide con el ángulo que ha descrito en cada momento el cuerpo auxiliar.

**INICIO:** Devuelve la escena a su estado inicial reiniciando los valores de los controles y auxiliares. Si hay animación automática, ésta comienza de nuevo.

## Significado del desfase

Hasta ahora, hemos considerado siempre que el cuerpo real inicia su movimiento ( $t= 0$  s) en el origen de coordenadas ( $y= 0$  m) y parte hacia las ordenadas positivas (hacia arriba). Sin embargo, la situación inicial puede ser distinta y para reflejar este hecho se introduce el concepto de **desfase " $\varphi$ "**.

Recuerda que la ecuación completa de un M.A.S. es:

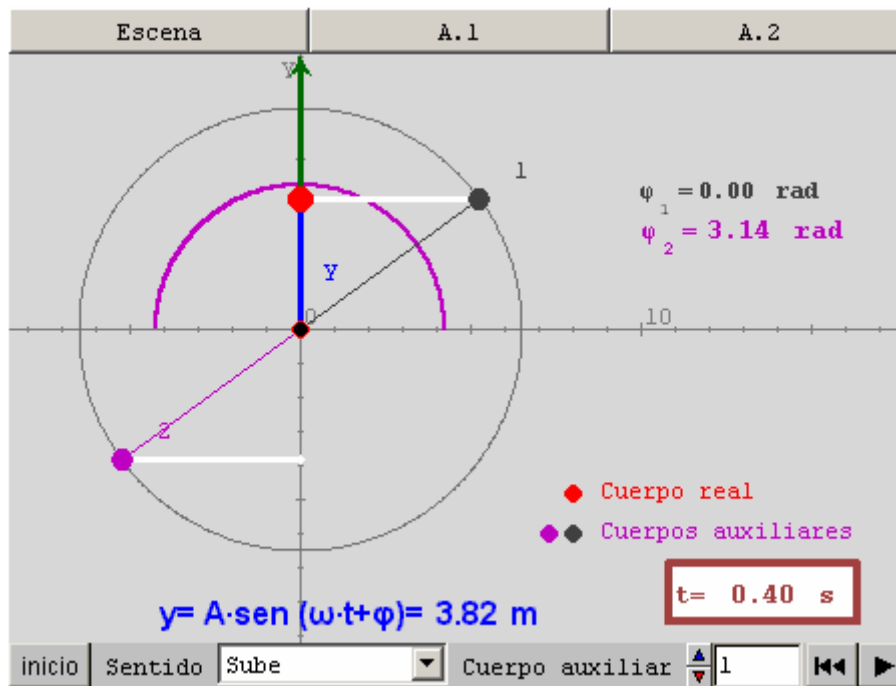
$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi)$$

La función que desempeña el desfase " $\varphi$ " es indicar cual es la posición del móvil en el instante inicial ( $t= 0$ ) y hacia donde se dirige.

Para determinar su valor debemos "imaginarnos" en qué situación debe encontrarse el cuerpo auxiliar en el instante inicial para que, una vez iniciado el movimiento, su sombra siga estando sobre el cuerpo real, tal como vimos al estudiar la [relación entre el M.A.S. y el M.C.U.](#)

Avanza a la siguiente página para practicar la identificación del desfase.





ESCENA: Para iniciar la escena mueve el cuerpo real a la posición inicial que desees pulsando sobre él con el puntero del ratón y desplazándolo por su trayectoria.

Observa los cuerpos auxiliares “1” y “2”. Ambos tienen su proyección sobre el cuerpo real. Sin embargo, sólo la proyección de uno de ellos va a seguir al cuerpo real cuando este inicie su movimiento. Recuerda que los cuerpos auxiliares siempre giran en sentido positivo (antihorario)

A.1: Escoge en el menú el sentido inicial del movimiento del cuerpo. Escoge, con los pulsadores del botón “cuerpo auxiliar”, cuál de ellos crees que es el correcto y pulsa el botón “animar” para comprobar si tu elección ha sido la correcta. Repite varias veces la experiencia cambiando la posición inicial del cuerpo real y el sentido en el que parte.

A.2: Fíjate en el caso en el que el cuerpo se encuentra inicialmente en uno de los extremos de la trayectoria. En este caso la posición de los dos cuerpos auxiliares coincide, por lo que es indistinto escoger uno u otro y el ejemplo pierde su interés.

INICIO: Devuelve la escena a su estado inicial reiniciando los valores de los controles y auxiliares. Si hay animación automática, ésta comienza de nuevo.

RETROCESO: Este es el botón de "reinicio de animación". Reinicia la animación de manera que no continúa donde se detuvo sino que comienza de nuevo.

PLAY: Arranca, detiene o continúa la animación. Si la animación no ha comenzado, este botón la arranca. Si la animación está funcionando, el botón la detiene. Si la animación está detenida, el botón la hace continuar. Para hacerla comenzar de nuevo hay que pulsar el botón de "reinicio de animación" ("|<<").

## Conclusiones sobre Cinemática del M.A.S.

- El Movimiento Armónico Simple es un movimiento periódico en el que la posición varía según una ecuación de tipo senoidal o cosenoidal.

- La velocidad del cuerpo cambia continuamente, siendo máxima en el centro de la trayectoria y nula en los extremos, donde el cuerpo cambia el sentido del movimiento.

- El M.A.S. es un movimiento **acelerado no uniformemente**. Su **aceleración es proporcional al desplazamiento** y de signo opuesto a este. Toma su valor máximo en los extremos de la trayectoria, mientras que es mínimo en el centro.

- Podemos imaginar un M.A.S. como una proyección de un Movimiento Circular Uniforme. El desfase nos indica la posición del cuerpo en el instante inicial.

## El origen del M.A.S.: La fuerza elástica.

Como se ha visto anteriormente, al estudiar [la aceleración](#) en el M.A.S.,

Si se escribe en función de la posición:

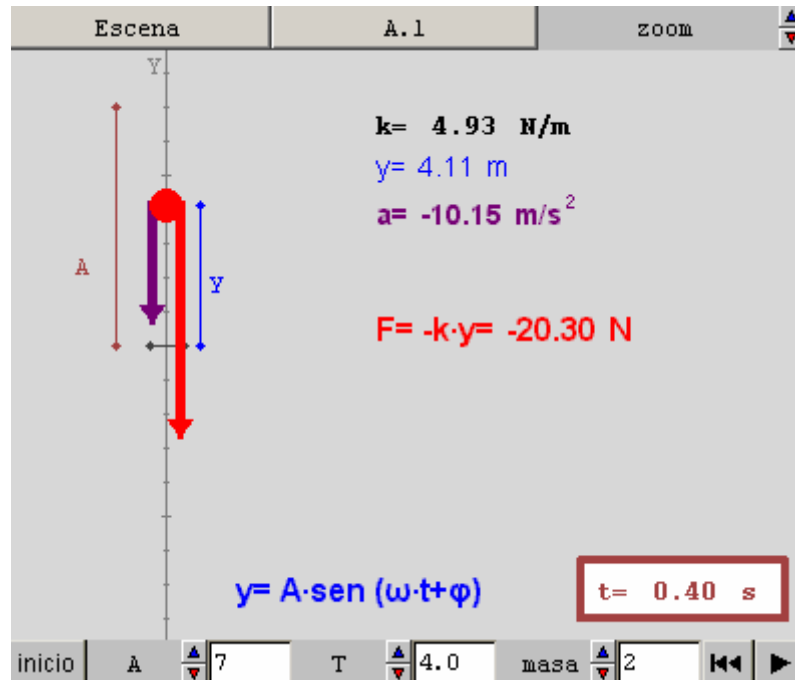
Aplicando la segunda ley de Newton obtenemos el valor de la **fuerza elástica**:

$$F = -m \cdot \omega^2 \cdot y = -k \cdot y$$

Ley de Hooke

donde  $k = m \cdot \omega^2$  se denomina **constante elástica del movimiento**, y se mide en N/m.

En la siguiente ventana se puede observar el comportamiento de la fuerza elástica que origina el M.A.S.



ESCENA: Al iniciar la animación puedes ver el vector aceleración (en blanco) y el vector fuerza elástica (en rojo). Selecciona, mediante los pulsadores, los valores de amplitud, período y masa deseados. Usa el zoom si es necesario.

A.1: Detén la animación en distintas posiciones y relaciona el sentido de la aceleración y de la fuerza con el signo de la elongación. Identifica también las posiciones que ocupa el cuerpo cuando la fuerza toma su valor absoluto máximo y mínimo.

INICIO: Devuelve la escena a su estado inicial reiniciando los valores de los controles y auxiliares. Si hay animación automática, ésta comienza de nuevo.

RETROCESO: Este es el botón de "reinicio de animación". Reinicia la animación de manera que no continúa donde se detuvo sino que comienza de nuevo.

PLAY: Arranca, detiene o continúa la animación. Si la animación no ha comenzado, este botón la arranca. Si la animación está funcionando, el botón la detiene. Si la animación está detenida, el botón la hace continuar. Para hacerla comenzar de nuevo hay que pulsar el botón de "reinicio de animación" ("|<<").

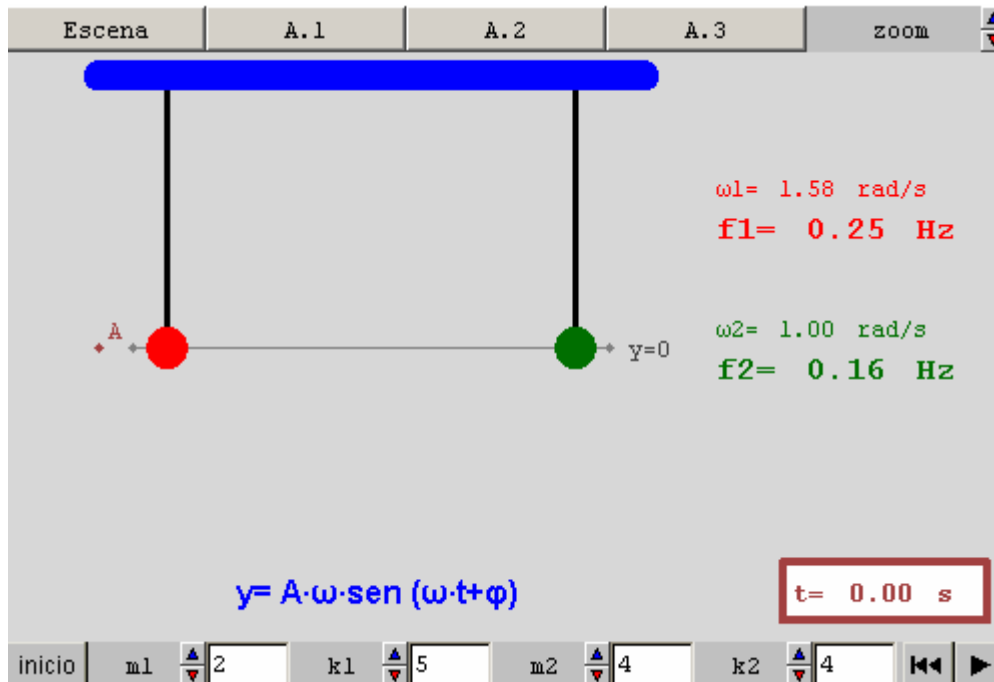
## La frecuencia de la vibración.

A partir de la definición de la constante elástica, se obtiene la pulsación:

Y recordando la relación entre pulsación y frecuencia, se tiene:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Se observa que la frecuencia depende exclusivamente de la constante elástica del movimiento y de la masa del cuerpo que lo describe. En la siguiente página se intenta mostrar la influencia de ambas magnitudes sobre la frecuencia del movimiento



ESCENA: Es esta escena los segmentos verticales negros representan dos muelles de los que cuelgan el cuerpo 1 (rojo) y el 2 (verde). Antes de iniciar la animación debes tirar de los cuerpos hacia abajo. Para ello, haz clic con el ratón sobre el cuerpo rojo y arrástralo hacia abajo. Observa que la amplitud del movimiento depende de esta acción. Después inicia la animación.

A.1: Reinicia la escena. Usa el mismo valor para las constantes de los dos muelles, y masas diferentes para los cuerpos. Anota las conclusiones.

A.2: Utiliza ahora dos masas iguales en muelles con diferente constante elástica. Observa las frecuencias y anota las conclusiones.

A.3: Manteniendo las dos masas iguales busca valores de  $k_1$  y  $k_2$  que hagan que un resorte tenga el doble de frecuencia que el otro. ¿Cuál es la relación entre las constantes? Usa ahora valores iguales para las constantes y busca valores de masas que hagan doble una de las frecuencias.

INICIO: Devuelve la escena a su estado inicial reiniciando los valores de los controles y auxiliares. Si hay animación automática, ésta comienza de nuevo.

RETROCESO: Este es el botón de "reinicio de animación". Reinicia la animación de manera que no continúa donde se detuvo sino que comienza de nuevo.

## Conclusiones sobre Dinámica del M.A.S.

- La **fuerza elástica** responsable de un M.A.S. es siempre **opuesta al desplazamiento y proporcional al mismo**.

- La **frecuencia** con la que vibra un cuerpo que describe un M.A.S. **depende sólo de su masa y de la constante elástica**, mientras que es independiente de la amplitud de la vibración.

## La energía mecánica se conserva en el M.A.S.

Cualquier cuerpo que se mueva posee **energía cinética**. Si se escribe la

$$E_c = \frac{1}{2} k (A^2 - y^2)$$

gráficamente en función de la posición, se tiene:

Además, dado el hecho de que **la fuerza elástica que actúa sobre el cuerpo es una fuerza conservativa**, el cuerpo lleva asociada cierta **energía potencial**

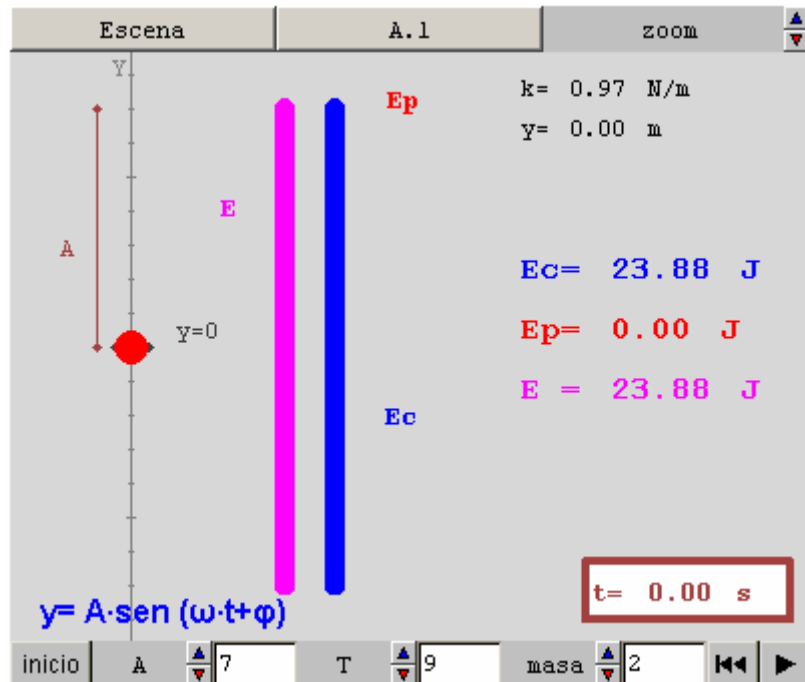
$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot y^2$$

**elástica**, dada por la ecuación, gráficamente:

Los valores que toman las energías cinética y potencial dependen de la posición que ocupa el cuerpo. Sin embargo, **la energía total que posee el cuerpo se mantiene constante en toda la trayectoria.**

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} k \cdot A^2$$

Pulsa en avanzar para comprobarlo gráficamente.



ESCENA: Al iniciar la animación, la energía cinética viene representada por una barra azul, la potencial elástica por una barra roja, y la energía total por otra rosa. Observa que, aunque las energías cinética y potencial varían continuamente su valor, la suma de ambas permanece constante.

A.1: Tanto  $E_c$  como  $E_p$  varían al hacerlo la posición del cuerpo.

Fíjate y anota en qué posiciones del cuerpo toman sus valores máximos y mínimos las energías cinética y potencial elástica.

INICIO: Devuelve la escena a su estado inicial reiniciando los valores de los controles y auxiliares. Si hay animación automática, ésta comienza de nuevo.

RETROCESO: Este es el botón de "reinicio de animación". Reinicia la animación de manera que no continúa donde se detuvo sino que comienza de nuevo.

PLAY: Arranca, detiene o continúa la animación. Si la animación no ha comenzado, este botón la arranca. Si la animación está funcionando, el botón la detiene. Si la animación está detenida, el botón la hace continuar. Para hacerla comenzar de nuevo hay que pulsar el botón de "reinicio de animación" ("|<<").



## Representación gráfica de las energías implicadas.

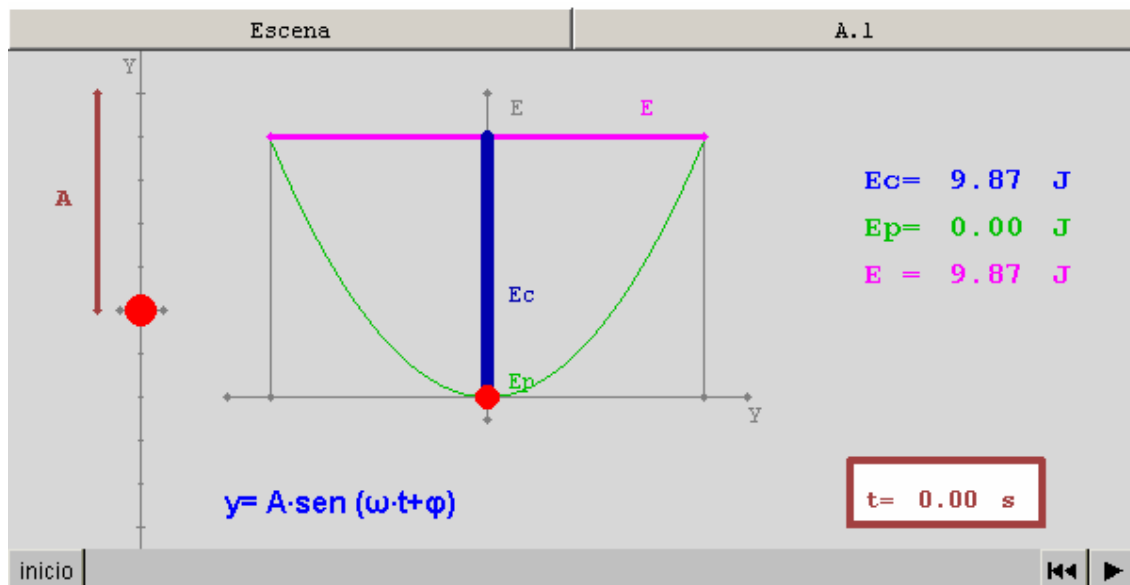
Existe otra forma en la que se pueden representar las variaciones que se producen en las energías cinética y potencial en un M.A.S.

$$E_p = \frac{1}{2}k \cdot y^2$$

Recuerda que la energía potencial viene dada por: y por tanto su representación gráfica corresponde a una parábola.

La energía mecánica o total se mantiene constante y en consecuencia su representación se corresponde con una recta.

Si pulsas en el botón avanzar podrás ver ambas representaciones combinadas



ESCENA: En gráfica de la escena se representan energías (eje vertical) frente a elongaciones (eje horizontal). La parábola verde representa la energía cinética, y la recta rosa la energía total del cuerpo. En cada instante, la diferencia entre la energía cinética (segmento verde) y la energía total (rosa), representa la energía potencial (segmento azul).

A.1: Comprueba, de nuevo, como a pesar de que las energías cinética y potencial varían continuamente, la energía total permanece constante. Observa las posiciones del cuerpo que hacen máximos y mínimos ambos tipos de energía.

## Conclusiones sobre Energía en el M.A.S.

- La fuerza elástica que origina un M.A.S. es conservativa. La energía potencial elástica que lleva asociada es nula en el centro de la trayectoria y máxima en sus extremos.

- La energía cinética en el M.A.S. varía continuamente, siendo máxima en el centro de la trayectoria y nula en sus extremos.

- Dado el carácter conservativo de la fuerza elástica, **la energía mecánica total del cuerpo permanece constante a lo largo de toda la trayectoria**

## EVALUACIÓN



de preguntas que te permitirán evaluar tu conocimiento de algunos de los conceptos de los que trata esta unidad

El M.A.S. es provocado por la fuerza elástica. Esta fuerza es:

- Proporcional a la amplitud.
- Constante en módulo.
- Proporcional a la elongación y de sentido opuesto.
- Inversamente proporcional al desfase

En un M.A.S. la energía mecánica es proporcional:

- Al período.
- Al ángulo de desfase.
- A la amplitud del movimiento.
- Al cuadrado de la amplitud

La frecuencia del movimiento viene determinada por:

- La amplitud del movimiento.
- La masa del cuerpo y la constante elástica.
- El desfase y la elongación.

Si cambiamos el período del movimiento, también cambiará:

- La frecuencia y la pulsación.
- La amplitud y la pulsación.
- El desfase y la amplitud.
- La frecuencia y el desfase.

¿Qué nos indica el desfase?

- La situación del cuerpo en el instante inicial.
- El tiempo que tarda el cuerpo en ponerse en movimiento.
- La frecuencia del movimiento.

En un M.A.S.:

- Las energías cinética y potencial no cambian a lo largo de la trayectoria.
- Sólo existe energía cinética y se mantiene constante.
- La energía mecánica se mantiene constante.
- La energía potencial es constante mientras que la cinética cambia continuamente

La velocidad con que se mueve el cuerpo:

- Es proporcional a la elongación.
- Es máxima en el centro y nula en los extremos de la trayectoria.
- Permanece constante en toda la trayectoria.
- Aumenta cuando el cuerpo se mueve en un sentido y disminuye en el otro sentido

La aceleración en el M.A.S. es:

- Del mismo signo que la elongación.
- Constante en toda la trayectoria.
- Nula en el centro de la trayectoria y máxima en los extremos.
- Máxima en el centro de la trayectoria y nula en los extremos.

Un movimiento armónico simple se puede calificar de:

- Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado
- Movimiento rectilíneo uniforme
- Movimiento rectilíneo acelerado no uniformemente