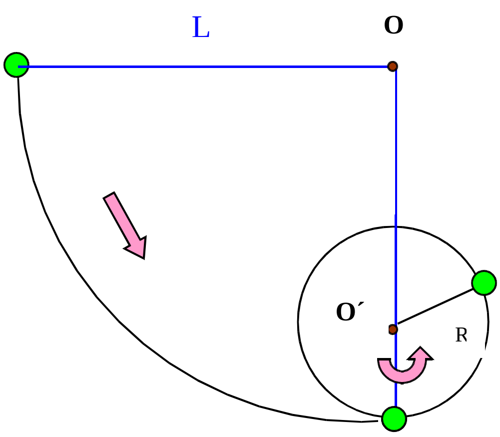
RIZO EN EL PLANO VERTICAL

Una pequeña masa está colgada de un hilo fino de longitud L. Apartamos dicha masa 90º de su posición de equilibrio de manera que el hilo queda tenso y horizontal, y la soltamos. Se pide:

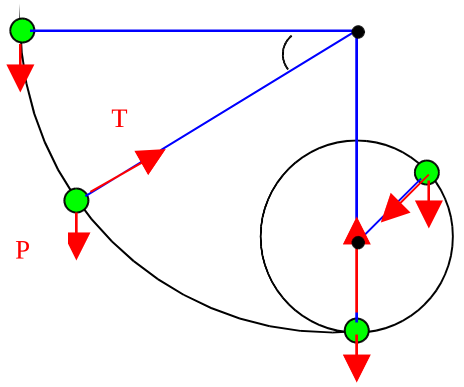
a) Fuerza o fuerzas sobre "m".

b) Demostrar que la tensión del hilo, cuando alcance de nuevo la posición vertical, es el triple que el peso de la masa.

c) Si al pasar por la vertical, el hilo se encontrase un clavo O´¿ cuál debería ser como mínimo la distancia entre el punto de suspensión O y el clavo O´ para que la partícula describa un giro completo de radio R alrededor de O´? Se desprecian rozamientos.



a) Cuando dejamos libre la masa desde la posición inicial, las fuerzas que actuarán sobre ella serán: el peso P, y la tensión del hilo T, tanto en la primera parte como en el rizo de radio R. El peso P, se mantendrá constante, pero la tensión del hilo es variable y depende del punto donde se encuentre la masa “m”. Será pues un movimiento con fuerza resultante que depende del punto ocupado por “m” y por tanto con aceleración variable.

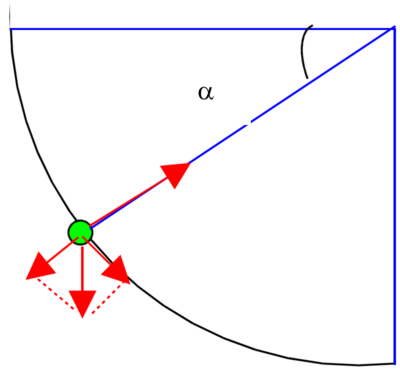


Como se trata de un movimiento circular, deberíamos pensar en términos de componentes tangenciales y radiales de las fuerzas P y T. La tensión del hilo T siempre es radial y, por tanto colaborará en la fuerza centrípeta necesaria que debe actuar sobre “m” en cada punto de la trayectoria. El peso P, sin embargo tendrá componente tangencial P_t y componente radial P_r que en cada punto dependerán del ángulo que forme el hilo con la horizontal.

$P_R = mgsen\alpha$ $\qquad$ $P_T = mg\cos\alpha$

Y, la fuerza centrípeta resultante en cada punto vendrá dada por

$\vec{F}_C = \vec{T} + \vec{P}_R = \dfrac{mv^2}{R}\vec{u}_r$ $\qquad$ en un caso R=L y en el rizo R=R.



Situación complicada bajo el punto de vista cinemático, ya que tanto la componente tangencial del peso como la componente centrípeta dependen del punto en el que esté situada la masa. El movimiento es complejo bajo el punto de vista cinemático con aceleraciones variables. En estos casos como ya hemos indicado otras veces, es conveniente un razonamiento energético. El este tipo de razonamientos, además de delimitar convenientemente el sistema y calificar las fuerzas de interiores y de exteriores, hay que considerar los trabajos realizados por estas fuerzas y, los tipos de energía que puede acumular el sistema. Este tipo de razonamientos, nos anula la variable "tiempo" (del cual nada sabemos) y, nos relaciona posición con velocidad instantánea.

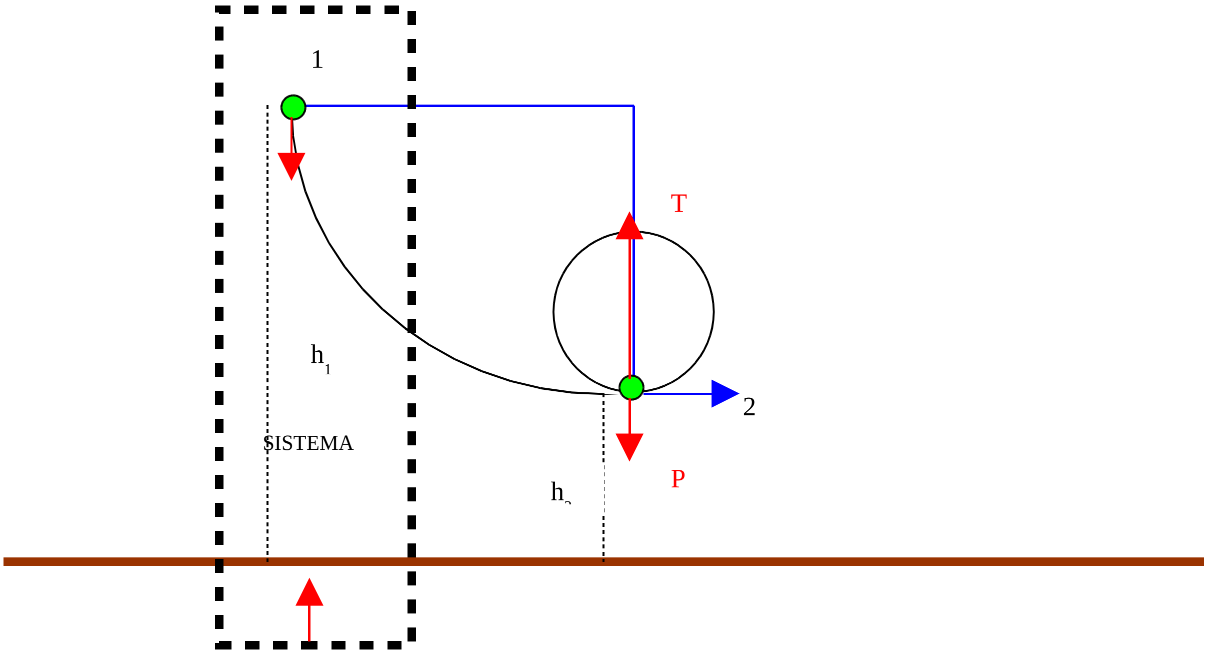
Consideraremos pues como "sistema" el formado por la masa "m" y la Tierra. El peso P será fuerza interior, mientras que la tensión del hilo podemos considerarla fuerza exterior. El trabajo de la fuerza interior P, está relacionado con los valores de energía potencial del sistema, y, el trabajo de la fuerza exterior T resulta ser cero pues es siempre perpendicular a la trayectoria de "m". La energía de nuestro sistema puede ser cinética (debido al movimiento de la masa "m") y potencial gravitatoria (debida a la posición en el campo gravitatorio). Como el trabajo exterior sobre el sistema es cero, la energía del sistema debe permanecer constante.

$W_{ext} = \Delta E_c + \Delta E_p$ como el trabajo exterior es cero $0 = \Delta E_c + \Delta E_p$

Con lo que $E_c + E_p = constante$

b) Para demostrar que la tensión del hilo cuando pasa por la posición vertical es el triple que el peso (T = 3 mg), utilizaremos un razonamiento energético y haremos balance entre la posición inicial

1, con el hilo horizontal, y la posición vertical 2, con el hilo completamente vertical.



Por el principio de conservación de la energía, al ser cero el trabajo exterior $W_{ext} = 0$, la energía cinética más la potencial debe permanecer constante entre el punto 1 y el 2.

$$E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2} \qquad 0 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2$$

$$mg(h_1 - h_2) = \frac{1}{2}mv_2^2 \qquad \text{como} \qquad h_1 - h_2 = L \qquad v_2 = \sqrt{2gL}$$

Ahora, volviendo a los razonamientos dinámicos, en el punto 2, debe cumplirse:

$$\vec{F}_{c2} = \vec{T}_2 + \vec{P} \qquad \text{suma de vectores que supondrá} \qquad F_{c2} = T_2 - P$$

Substituyendo valores $T_2 = \frac{mv_2^2}{R} + mg$ como R=L y $v_2 = \sqrt{2gL}$

Tenemos que $T_2 = \frac{m2gL}{L} + mg = 2mg + mg = 3mg$

Luego la tensión en el punto más bajo (justo antes de describir el rizo) es tres veces el peso de la masa.

c) En el rizo, la velocidad mínima con la cual puede describirlo, será aquella que, en el punto más alto, punto 3, la fuerza resultante (centrípeta) necesaria para ello corresponderá sólo al peso, siendo cero la tensión del hilo.

Se describirá el rizo siempre que $F_{c3} \geq P$. Consideremos la situación límite $F_{c3} = P$.

$\frac{mv_3^2}{R} = mg$ de donde $v_3 = \sqrt{Rg}$

Como el sistema continúa siendo aislado y conservativo, hacemos balance energético entre el punto 2 y el 3.

$E_{c2} + E_{p2} = E_{c3} + E_{p3}$ $\frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 = \frac{1}{2}mv_3^2 + mgh_3$

Como $v_2 = \sqrt{2gL}$, $v_3 = \sqrt{Rg}$ y $h_3 - h_2 = 2R$

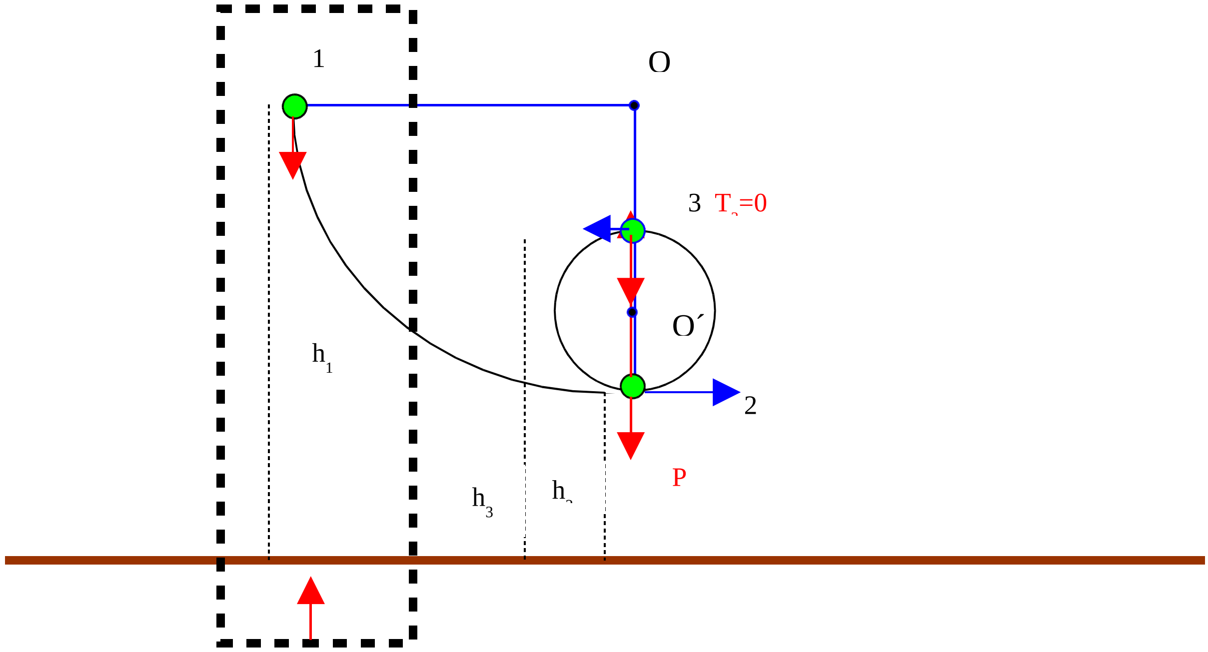
Tenemos que, la situación límite corresponderá a L = 2´5 R o lo que es lo mismo R = 0´4 L

La distancia mínima entre los clavos para que se describa el rizo será

L – R = 0´6 L

Si L – R ≥ 0´6 R se describe el rizo

Si L – R < 0´6 R no llega a describirse el rizo en la parte superior.



Cuando el clavo esté situado a una distancia de O mayor de 0´6 L, el rizo se describirá perfectamente y en el punto 3, además del peso P, actuará la tensión del hilo para procurar la fuerza resultante centrípeta necesaria.

Cuando esta distancia sea menor,, antes del punto 3, la cuerda dejará de estar tensa, sólo actuará el peso y el movimiento será el similar al de una parábola.

En el apartado de applet puedes comprobar todos los casos posibles para distintas distancias entre O y O´